New research orientation for partial differential equations of parabolic type
Nouvelle orientation de recherche pour les équations aux dérivées partielles du type parabolique

Hisao Fujita Yashima

NHSM - Sidi Abdallah
hisaofujitayashima@yahoo.com
hisao.yashima@yandex.com

Sidi Abdallah - 14/12/2025

Première Partie

Introduction aux équations aux dérivées partielles

A différence des équations différentielles ordinaires, pour les **équations aux dérivées partielles**, dont la forme générale est

$$\Phi\big(x_1, \cdots, x_d, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_d^m}\big) = 0,$$

on ne connaît pas de méthode applicable à tous les types d'équations.

Ainsi, nous sommes obligés d'étudier les équations aux dérivées partielles avec des méthodes différentes selon le type d'équations.

Rappelons donc la

classification des équations aux dérivées partielles

en des types [ici nous nous limitons aux équations aux dérivées partielles du premier et second ordre].

Equations du premier ordre :

Equations de transport $\partial_t u + v \cdot \nabla u = 0$

Equations du second ordre :

Equations du type elliptique

Exemple : l'éqaution de Poisson $\Delta u = f$

Equations du type hyperbolique

Exemple : l'éqaution des ondes $\partial_t^2 u = \Delta u$

Equations du type parabolique

Exemple : l'éqaution de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$

Il y a aussi des équations du second ordre qui ne sont pas classifiées dans ces trois types, par exemple : l'éq. de Schöredinger

Equation de transport - méthode des caractéristiques

Commençons par l'**équation de transport**.

Pour simplifier, considérons l'équation de transport dans $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d$

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \qquad (1)$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d, \qquad (2)$$

où $u_0(x)$ est une fonction donnée.

Dans l'équation (1) et dans la suite nous utilisons la notation

$$v(t,x) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{d} v_i(t,x) \partial_{x_i}.$$

Méthode des caractéristiques - rappel de la dérivée totale

Le problème de Cauchy (1)–(2) peut être résolu par la **méthode des caractéristiques**.

Pour le voir, rappelons d'abord la dérivée totale :

Si $\gamma : [0,\infty[\to \mathbb{R}^d$ est continue et $u : [0,\infty[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors la **dérivée totale** de $u(t,\gamma(t))$ est

$$\frac{d}{dt}u(t,\gamma(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[u(t+h,\gamma(t+h)) - u(t,\gamma(t))\Big] =$$

$$= \partial_t u(t,x)\big|_{x=\gamma(t)} + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} u(t,x)\big|_{x=\gamma(t)} \frac{d}{dt}\gamma_i(t) \equiv$$

$$\equiv \partial_t u(t,\gamma(t)) + \frac{d}{dt}\gamma(t)\cdot \nabla u(t,\gamma(t)).$$

Caractéristiques

Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = v(t, \gamma(t)), \qquad t \geq 0, \ \gamma(t) \in \mathbb{R}^d,$$

avec la condition initiale

$$\gamma(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^d.$$

En faisant varier la donnée initiale $x^{(0)}$ dans $\mathbb{R}^d$ (et en supposant que $v(t, x)$ jouit d'une régularité suffisante pour résoudre cette équation), on aura une famille de courbes

$$\gamma(t) = \gamma(x^{(0)}; t), \qquad x^{(0)} \in \mathbb{R}^d.$$

Ces courbes peuvent être obtenues aussi par l'équation intégrale

$$\gamma(x^{(0)}; t) = x^{(0)} + \int_0^t v(s, \gamma(x^{(0)}; s)) ds.$$

Résolution de l'équation de transport

En substituant $\frac{d}{dt}\gamma(x^{(0)};t) = v(t,\gamma(x^{(0)},t))$ dans

$$\partial_t u(t,\gamma(x^{(0)};t)) + \frac{d}{dt}\gamma(x^{(0)};t)\cdot\nabla u(t,\gamma(x^{(0)};t)),$$

on obtient

$$\partial_t u(t,\gamma(x^{(0)};t)) + v(t,\gamma(x^{(0)};t))\cdot\nabla u(t,\gamma(x^{(0)};t)) = \frac{d}{dt}u(t,\gamma(x^{(0)};t)).$$

Donc, **en résolvant les famille des équations différentielles ordinaires**

$$\frac{d}{dt}u(t,\gamma(x^{(0)};t)) = f(t,\gamma(x^{(0)};t),u(t,\gamma(x^{(0)};t))), \quad t>0,\ x^{(0)}\in\mathbb{R}^d,$$

on résout l'équation de transport

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x)\cdot\nabla u(t,x) = f(t,x,u(t,x))$$

avec la condition initiale

$$u(0,x^{(0)}) = u(0,\gamma(x^{(0)};0)) = u_0(x^{(0)}).$$

Equation de transport - synthèse

*Si on suppose les conditions qui garantissent la définition des caractéristiques $\gamma(x^{(0)}; t)$, on peut **transformer l'équation de transport***

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x,u(t,x))$$

en une famille d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{dt} u(t, \gamma(x^{(0)}; t)) = f(t, \gamma(x^{(0)}; t), u(t, \gamma(x^{(0)}; t))).$$

Ainsi, en résolvant les équations différentielles ordinaires avec la condition initiale

$$u(0, x^{(0)}) = u_0(x^{(0)}),$$

on obtiendra la solution de l'équation de transport avec cette condition initiale.

Si le domaine Ω n'est pas $\mathbb{R}^d$, il suffit de poser la condition d'entrée sur la partie de la frontière $\partial\Omega$ où $v \cdot n < 0$ (ici n est la normale extérieure sur $\partial\Omega$) et, en définissant la caractéristique de cette partie, de transformer l'équation de transport en des équations différentielles ordinaires.

Pour les équations aux dérivées partielles du second ordre

Depuis l'époque de D'Alembert, Euler, etc. jusqu'au début du XXe siècle, on cherchait la solution explicite de l'équation. Mais avec l'arrivée de l'Analyse fonctionnelle, en particulier celle des espaces de Sobolev, on a eu la tendance de considérer une possible solution comme un élément d'un espace fonctionnel. La norme d'une fonction est un nombre réel ; de la norme on ne peut pas reconstruire la fonction, qui est un élément de $\mathbb{R}^\Omega$ *(s'il s'agit d'une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*). Ainsi la considération d'une fonction comme un élément d'un espace fonctionnel a fait perdre l'infinité d'information.*

Alors je tente de récupérer les informations des solutions fondamentales explicites, convaincu que ces informations récupérées nous donnent la clé pour ouvrir une nouvelle perspective pour les équations aux dérivées partielles.

Fonction harmonique pour l'équation de Poisson

Considérons l'équation de Poisson

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \ d \geq 2.$$

On pose

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{pour } d = 2 \\ -\frac{1}{(d-2)|S^{d-1}|\,|x|^{d-2}} & \text{pour } d \geq 3 \end{cases} \qquad x \neq 0,$$

où $|S^{d-1}|$ est la superficie de la surface de la sphère de rayon 1.
Alors la fonction

$$u_0(x) = \int_\Omega U(x-y) f(y) dy$$

vérifie l'équation $\Delta u_0 = f$ dans Ω.

Fonction harmonique pour l'équation de Poisson [suite]

Si $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, et $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx < \infty$, alors $u_0(x)$ vérifie, outre l'équation de Poisson, la condition

$$u_0(x) \to 0 \qquad \text{pour} \quad |x| \to \infty.$$

- Exemple d'application :
  pour $d = 3$, le potentiel gravitationnel engendré par la masse distribuée avec la densité $\varrho(x)$ dans l'espace.

Si Ω est différent de $\mathbb{R}^d$, en particulier dans le cas où Ω est borné, pour résoudre un problème concret, il faut corriger la fonction $u_0(x)$ en tenant compte de la condition aux limites.
Pour cet argument, voir par exemple [Mikhaïrov,1976/1980].

Comme il est bien connu, la solution du problème de Cauchy

$$\partial_t^2 u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), \qquad u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(t,x)\big|_{t=0} = \psi(x),$$

est donnée par

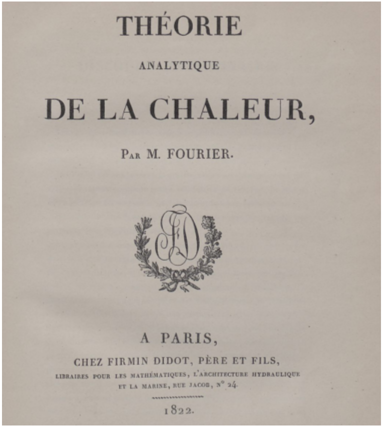
$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi.$$

Cette solution est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour l'équation des ondes $\partial_t^2 u = \Delta u$ dans $\mathbb{R}^d \ni x$, il y une formule similaire, mais plus compliquée et ça ne donne pas immédiatement la solution explicite du problème de Cauchy. Pour les détails, voir [Evance,2010].

Equation de la chaleur - à partir de Fourier

L'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$ a été formulée par Fourier dans [Fourier,1822] et sa solution a été donnée dans le même ouvrage (dans lequel il a introduit aussi la série de Fourier pour décrire la variation de la distribution de la température sur un segment $[a, b]$).



Soit

$$\Theta(t,x) = \frac{1}{(4\pi t\kappa)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t\kappa}\Big), \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Soit $u_0(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles continue et bornée.
Alors la fonction

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t,x-y)u_0(y)dy \tag{4}$$

vérifie l'équation

$$\partial_t u(t,x) = \kappa\Delta u(t,x) \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$$

et la relation

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = u_0(x).$$

Solution fondamentale de l'équation de la chaleur [suite]

Si en outre $f(t,x)$ est une fonction définie sur $[0,\infty[\,\times\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles continue et bornée sur $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ pour tout $\tau>0$, alors la fonction

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}\Theta(t,x-y)u_0(y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\Theta(t-s,x-y)f(s,y)dyds \qquad (5)$$

vérifie l'équation

$$\partial_t u(t,x)=\kappa\Delta u(t,x)+f(t,x) \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$$

et la relation

$$\lim_{t\to 0^+}u(t,x)=u_0(x).$$

petite remarque

La solution $u(t,x)$ donnée dans (4) ou (5) est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ si $u_0(x)$ et $f(t,x)$ sont continues et bornées, mais $u(t,x)$ (ni $|u(t,x)|^p$ pour quelconque $p \geq 1$) n'est pas nécessairement intégrable.

Donc $u(t,\cdot)$ n'appartient en général pas à un espace de Sobolev (ni à un espace de Lebesgue).

Alors les espaces fonctionnels adéquats sont

$C^k(\mathrm{R}^d)$ – espace des fonctions k-fois continûment dérivables avec la norme

$$\|u\|_{C^k(\mathrm{R}^d)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u(t,x)|,$$

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}, \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j,$$

et

$C^{k+\sigma}(\mathrm{R}^d)$, $0<\sigma\leq 1$, – espace de Hölder.

Continuité höldérienne - notations

Notations :

$$Q_\tau = [0,\tau] \times \mathbb{R}^d.$$

$$[\varphi]^{(k+\sigma)}_{Q_\tau} = [\varphi]^{(k+\sigma)}_{x,Q_\tau} + [\varphi]^{(\frac{k+\sigma}{2})}_{t,Q_\tau} \tag{6}$$

où

$$[\varphi]^{(k+\sigma)}_{x,Q_\tau} = \sum_{2r+|\nu|=k} [D_t^r D_x^\nu \varphi]^{(\sigma)}_{x,Q_\tau},$$

$$[\varphi]^{(\frac{k+\sigma}{2})}_{t,Q_\tau} = \sum_{0<\frac{k+\sigma}{2}-r-\frac{|\nu|}{2}<1} [D_t^r D_x^\nu \varphi]^{(\frac{k+\sigma}{2}-r-\frac{|\nu|}{2})}_{t,Q_\tau},$$

$$[\varphi]^{(\sigma)}_{x,Q_\tau} = \sup_{(t,x),(t,y)\in Q_\tau,\, x\neq y} \frac{|\varphi(t,x)-\varphi(t,y)|}{|x-y|^\sigma},$$

$$[\varphi]^{(\sigma')}_{t,Q_\tau} = \sup_{(t,x),(s,x)\in Q_\tau,\, t\neq s} \frac{|\varphi(t,x)-\varphi(s,x)|}{|t-s|^{\sigma'}},$$

Continuité höldérienne - estimation

L'estimation fondamentale est

1) Pour la solution $u(t,x)$ du problème

$$\partial_t u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{pour} \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R}^d,$$

$$u(0,x) = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^d$$

on a

$$[u]^{(k+2+\sigma)}_{Q_\tau} \leq C[f]^{(k+\sigma)}_{Q_\tau} \tag{7}$$

avec $0 < \alpha < 1$ et une constante C.

(voir [Ladyzhenskaya-Solonnikov-Ural'tseva,1967/1968])

La démonstration de (7) se base sur l'estimation de

$$\Big| \partial_{x_i} \partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t-s, x-y) f(s,y) dyds \Big|_{x=x^{(1)}}$$

$$- \partial_{x_i} \partial_{x_j} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t-s, x-y) f(s,y) dyds \Big|_{x=x^{(2)}} \Big|.$$

2) Pour la solution $u(t,x)$ du problème

$$\partial_t u(t,x) - \kappa\Delta u(t,x) = 0 \qquad \text{per} \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{per} \quad x \in \mathbb{R}^d$$

on a

$$[u]_{Q_\tau}^{(k+2+\sigma)} \leq C[u_0]_{x,\mathbb{R}^d}^{(k+2+\sigma)} \tag{8}$$

avec une constante C.

3) Pour la solution $u(t,x)$ du problème

$$\partial_t u(t,x) - \kappa\Delta u(t,x) = f(t,x), \qquad u(0,x) = u_0(x)$$

on a

$$[u]_{Q_\tau}^{(k+2+\sigma)} \leq C([u_0]_{x,\mathbb{R}^d}^{(k+2+\sigma)} + [f]_{Q_\tau}^{(k+\sigma)}). \tag{9}$$

Pour résoudre l'équation plus générale dans l'espace de Hölder

Pour construire la solution (locale) de l'équation

$$\partial_t u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = f(t,x) - v(t,x) \cdot \nabla u(t,x)$$

on utilise l'estimation du type

$$\|v \cdot \nabla \overline{U}\|_{C^{k+\sigma, \frac{k+\sigma}{2}}(R_\tau)} \leq C_v \tau^{\varepsilon} \|\overline{U}\|_{C^{k+2+\sigma, \frac{k+2+\sigma}{2}}(R_\tau)}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

et l'équation

$$\partial_t U - \kappa \Delta U = -v \cdot \nabla \overline{U}.$$

Littérature :
[Ladyzhenskaya-Solonnikov-Ural'tseva,1967/1968]
[Krylov,1997], etc...

La fonction $\Theta(t, x)$ et le mouvement brownien

Rappelons que pour $\kappa = \frac{1}{2}$ la fonction $\Theta(t, x)$ est la densité du mouvement brownien standard $B(t)$ au temps $t > 0$:

$$\int_D \Theta(t, x)dx = \mathbb{P}(\{B(t) \in D\}) = \mathbb{E}[\chi_D(B(t))]$$

pour tout sous-domaine D de $\mathbb{R}^d$.

Cette relation nous permet d'exprimer la solution $u(t, x)$ donnée dans (4) sous la forme

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(t, x - y)u_0(y)dy = \mathbb{E}[u_0(x - B(t))],$$

comme il s'agissait de l'espérance mathématique de $u_0(\cdot)$ calculée par un mouvement brownien qui part de x au temps t et va dans la direction inverse du temps jusqu'au temps initial.

Utilisation de l'équation stochastique

La dernière remarque suggère qu'il y a une relation entre la solution de l'équation du type parabolique et le processus stochastique.

En effet, Kolmogorov observe cette relation [Kolmogorov,1931] (même avant sa propre fondation de la théorie axiomatique du calcul des probabilités, publiée en 1933) :
aujourd'hui appelée *équation de Kolmogorov inverse*, qui donne la représentation stochastique de la solution d'une équation parabolique.

Pour définir la représentation stochastique de la solution d'une équation parabolique, on définit d'abord la famille de processus stochastiques $\xi_{t,x}(s)$ $((t,x) \in [0, \bar{s}[\times \mathbb{R}^d)$ par l'équation stochastique

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(r, \xi_{t,x}(r))dr + \int_t^s b(r, \xi_{t,x}(r))dW(r) \qquad (10)$$

pour $t \leq s \leq \bar{s}$.

Représentation stochastique - théorème

Alors on a le

Théorème. *Soit $\psi(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ continue, bornée ayant les dérivées premières et secondes continues et bornées par rapport à x_1, ..., x_d. Si on pose*

$$u(t,x) = \mathbb{E}\psi(\xi_{t,x}(\bar{s})), \qquad (t,x) \in [0,\bar{s}] \times \mathbb{R}^d,$$

la fonction $u(t,x)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t,x) + \\ + \sum_{i,j,k=1}^{d} b_{ik}(t,x)b_{jk}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(t,x) = 0, \qquad (11)$$

et à la condition ***finale*** $\quad \lim_{t \to \bar{s}^-} u(t,x) = \psi(x)$.

Pour la démonstration, voir par exemple [Guikhman-Skorokhod,1977/1980].

Représentation stochastique pour la diffusion tendant vers 0

La méthode de la représentation stochastique nous permet de faire tendre le coefficient de diffusion vers 0. En effet, l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{[\varepsilon]}(t,x)+\sum_{i=1}^{d}a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u^{[\varepsilon]}(t,x)+$$

$$+\varepsilon\sum_{i,j,k=1}^{d}b_{ik}(x)b_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u^{[\varepsilon]}(t,x)=0 \qquad (12)$$

correspond à l'équation stochastique

$$\xi_{t,x}^{[\varepsilon]}(s)=x+\int_t^s a(\xi_{t,x}^{[\varepsilon]}(r))dr+\varepsilon\int_t^s b(\xi_{t,x}^{[\varepsilon]}(r))dW(r). \qquad (13)$$

Dans (13) on peut faire tendre ε vers 0, de sorte que $u^{[\varepsilon]}(t,x)$ tend vers la solution de l'équation sans diffusion quand ε tend vers 0. Toutefois les résultats sont exprimés dans le langage de la théorie des probabilités ([Freidlin-Wentzell,2012]).

Lorsque le coefficient de diffusion tend vers 0

Nous nous intéressons particulièrement au comportement de la solution de l'équation de transport-diffusion (équation du type parabolique)

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = \kappa \Delta u + f$$

lorsque le coefficient de diffusion κ tend vers 0,

car la convergence de la solution de l'équation de transport-diffusion vers la solution de l'équation de transport

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = +f$$

est l'exigence du fait que l'équation de transport-diffusion représente le phénomène de transport et diffusion.

L'équation du type parabolique dans un domaine borné D de $\mathbb{R}^d$ est souvent étudiée dans le cadre des **espaces de Sobolev** et pour cela on commence généralement par multiplier scalairement l'équation

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u(t,x) - \kappa \Delta u(t,x) = f(t,x)$$

(avec la condition $u = 0$ sur ∂D) par $u(t,x)$ elle-même, ce qui nous donne l'inégalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(D)} + \frac{\kappa}{2}\|\nabla u(t,\cdot)\|^2_{L^2(D)} \leq$$

$$\leq \frac{\|v(t,\cdot)\|^2_{L^\infty(D)}}{\kappa}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(D)} + \frac{C_p^2}{\kappa}\|f(t,\cdot)\|^2_{L^2(D)}$$

(C_p étant le coefficient de l'inégalité de Poincaré).

Mais il est clair que cette inégalité perd de plus en plus son efficacité lorsque κ tend vers 0.

Par la convergence très faible

Certes, dans cette orientation de l'esprit, il y a aussi quelque possibilité :
Si on formule une solution généralisée très faible par

$$\int_0^\infty \int_\Omega u^{[\kappa]}[\partial_t\varphi + \nabla\cdot(\varphi v) + \kappa\Delta\varphi]dxdt =$$

$$= -\int_0^\infty \int_\Omega f\varphi dxdt - \int_\Omega u_0\varphi(0,x)dx,$$

on peut faire tendre κ vers 0 (c-à-d $\kappa\Delta\varphi \to 0$), ce qui donne une possibilité de convergence de $u^{[\kappa]}$ sans ses dérivées.

Mais ici f ne doit pas dépendre de u

et il est difficile d'en déduire une convergence dans une topologie plus forte [on aura besoin de convergence dans une topologie plus forte, si on veut considérer les équations non-linéaires].

Une remarque simple

Terminons cette première partie par une remarque sur un cas très simple de convergence de la solution de l'équation de transport-diffusion vers celle de l'équation de transport.

Supposons que la fonction $v = v(t)$ dépend seulement de t et considérons l'équation

$$\partial_t u(t,x) + v(t) \cdot \nabla u(t,x) = \kappa \Delta u(t,x) + f(t,x,u(t,x)). \qquad (*)$$

Introduisons le changement de variables

$$\xi = x - \int_0^t v(s)ds.$$

Alors on a

$$\partial_t u(t,x) = \partial_t u(t, x(t,x)) =$$

$$= \frac{d}{dt} u(t, x(t,\xi)) - \sum_{i=1}^{d} (\partial_{x_i} u(t,x)) \partial_t x_i(t,\xi) =$$

$$= \partial_t u(t,\xi) - v(t,\xi) \cdot \nabla_x u(t, x(t,\xi)).$$

Une remarque simple [suite]

Et, comme $\nabla_x u(t,x) = \nabla_\xi u(t,\xi)$, $\Delta_x u(t,x) = \Delta_\xi u(t,\xi)$, l'équation $(*)$ se réduit à l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t,\xi) = \kappa \Delta u(t,\xi) + f(t,\xi,u(t,\xi)). \qquad (**)$$

La solution $u(t,\xi)$ est donnée par (5), qui, si f dépend de u, devient une équation intégrale, et on voit aisément que, lorsque κ tend vers 0, la solution de l'équation $(**)$ devient la solution $u^{[0]}(t,\xi)$ de l'équation intégrale (si f dépend de u)

$$u^{[0]}(t,\xi) = u_0(\xi) + \int_0^t f(s,\xi,u^{[0]}(s,\xi))ds.$$

En revenant aux coordonnées (t,x), on voit que cette solution est la solution de l'équation de transport

$$\partial_t u(t,x) + v(t)\cdot\nabla u(t,x) = f(t,x,u(t,x)).$$

Conclusion de la Première Partie

Certes, si dans l'équation $(*)$ *la fonction* $v(t,x)$ *dépend de* $x \in \mathbb{R}^d$*, le raisonnement de cette remarque simple ne marche pas.*

Mais, si on réussit à construire des approximations dans lesquelles on peut obtenir un comportement similaire et si ces approximations convergent vers la solution de l'équation, on peut espérer d'obtenir une bonne caractérisation du comportement de la solution de l'équation de transport-diffusion dans le cas où le coefficient de diffusion tend vers 0.

Pour cela on doit utiliser les propriétés de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et tenir dans l'esprit l'idée de la méthode des caractéristiques pour la résolution de l'équation de transport.

Références de la Première Partie

[Mikhaïlov,1976/1980] Mikhaïlov, V. : *Équations aux dérivées partielles*. Mir, 1980 (traduit du russe 1976).

[Evance,2010] Evance, L. C. : *Partial differential equations*. AMS, 2010.

[Fourier,1822] Fourier, J. : *Théorie analytique de la chaleur*. Didot, Paris, 1822.

[Ladyzhenskaya-Solonnikov-Ural'tseva,1967/1968] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'tseva, N.N. : *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. AMS, 1968 (translated from Russian 1967).

[Krylov,1997] Krylov, N.V. : *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*. AMS, 1997.

Références de la Première Partie [suite]

[Kolmogorov,1931] Kolmogorov, A.N. : Über die analytischen Methodes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.*, vol. **104** (1931), pp. 415–438.

[Guikhman-Skorokhod,1977/1980] Guikhman, I., Skorokhod, A. : *Introduction à la théorie des processus aléatoires*. Mir, 1980 (traduit du russe 1977).

[Freidlin-Wentzell,2012] Freidlin, M.I., Wentzell, A.D. : *Random perturbations of dynamical systems*. Springer, 2012.

Deuxième Partie

Méthode

Nous proposons la méthode suivante :

- **Construire les solutions approchées $u^{[\kappa,n]}$ pour l'équation de transport-diffusion**

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = \kappa \Delta u + f,$$

en traduisant sur chaque pas de la discrétisation du temps

$\kappa \Delta u$ par la **solution fondamentale de l'équation de la chaleur**,

$v \cdot \nabla u$ par le **déplacement le long de la caractéristique**.

- **Construire aussi les solutions approchées $u^{[0,n]}$ pour l'équation de transport**

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = f.$$

- **Estimer la différence**

$$u^{[\kappa,n]}(t,x) - u^{[0,n]}(t,x).$$

- **Passer à la limite**

$$u^{[\kappa,n]} \to u^{[\kappa]}, \qquad u^{[0,n]} \to u^{[0]}.$$

Méthode [suite-1]

Définissons d'abord la famille de **caractéristiques**.

Pour chaque $(t^*, x^*) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \ \ \Omega \subset \mathbb{R}^d$, on définit la fonction

$$\gamma(t) = \gamma(t^*, x^*; t)$$

par l'équation intégrale

$$\gamma(t^*, x^*; t) = x^* + \int_{t^*}^{t} v(s, \gamma(t^*, x^*; s))ds. \tag{14}$$

NOTE Ici on suppose une certaine régularité de $v(t, x)$ de sorte que l'équation admet la solution unique.

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, alors la caractéristique $\gamma(t^*, x^*; t)$ peut terminer sur la frontière $\partial\Omega$.

Méthode [suite-2]

Maintenant introduisons la **discrétisation du temps**.

Il nous convient d'utiliser la famille de discrétisations du temps t suivante :

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \cdots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \cdots , \qquad t_k^{[n]} = k\delta_n, \quad (15)$$

où

$$\delta_n = 2^{-n}, \qquad n = 1, 2, \cdots . \quad (16)$$

Introduisons aussi la notation

$$\gamma_{k,-}^{[n]}(x) = \gamma(t_k^{[n]}, x; t_{k-1}^{[n]}).$$

Méthode [suite-3]

Nous utilisons la **solution fondamentale de l'équation de la chaleur** pour décrire la **diffusion** dans les solutions approchées.

C'est-à-dire, pour chaque $\kappa > 0$ et pour chaque n, nous définissons

$$\Theta_n^{[\kappa]}(x) = \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4\delta_n\kappa}\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{17}$$

C'est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \kappa\Delta u$$

au temps $t = \delta_n$.

Définition des solutions approchées $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ pour l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = \kappa \Delta u + f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d.$$

On définit

$$u^{[\kappa,n]}(t_0,x) = u_0(x), \tag{18}$$

$$u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[\kappa]}(y) u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - y) dy +$$

$$+\delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x), u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x))), \qquad k = 1, 2, \cdots, \tag{19}$$

$$u^{[\kappa,n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x)$$

$$\text{pour} \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}. \tag{20}$$

Méthode [suite-5]

Le terme $\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - y) dy$ **signifie** que la diffusion et le transport contribuent à la détermination de la valeur de $u^{[\kappa,n]}$ au point x à l'instant $t_k^{[n]}$ comme la solution de l'équation de la chaleur avec la donnée initiale $u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)$ avec le déplacement de $\gamma_{k,-}^{[n]}(x)$ à x.

Si nous considérons l'**équation de transport-diffusion de type conservation de la masse**

$$\partial_t u + \nabla \cdot (vu) = \kappa \Delta u + f,$$

alors le terme intégrale de la définition (19) doit être remplacé par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[\kappa]}(y) u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x-y)) J_k^{[n]}(x-y) dy,$$

où

$$J_k^{[n]}(x) = \det A, \qquad A = \Big(\frac{\partial(\gamma_{k,-}^{[n]}(x))_j}{\partial x_i} \Big)_{i,j=1,\cdots,d}.$$

De la définition de $J_k^{[n]}(x)$ et de $\gamma(t_k^{[n]}, x; s)$ il résultera que

$$J_k^{[n]}(x) = \exp\Big(- \int_{t_{k-1}^{[n]}}^{t_k^{[n]}} \nabla_\xi \cdot v(s,\xi)\big|_{\xi=\gamma(t_k^{[n]},x;s)} ds \Big).$$

Comme nous devrons estimer la différence entre $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ et l'approximation de la solution de l'équation de transport, nous avons besoin de définir les **solutions approchées** $u^{[0,n]}(t,x)$ pour l'équation de transport $\partial_t u + v \cdot \nabla u = f$:

On définit

$$u^{[0,n]}(0,x) = u_0(x), \tag{21}$$

$$u^{[0,n]}(t_k^{[n]},x) = u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},\gamma_{k,-}^{[n]}(x)) +$$

$$+ \delta_n f(t_{k-1}^{[n]},\gamma_{k,-}^{[n]}(x), u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},\gamma_{k,-}^{[n]}(x))), \quad k = 1,2,\cdots, \tag{22}$$

$$u^{[0,n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[0,n]}(t_k^{[n]},x)$$

$$\text{pour} \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}. \tag{23}$$

La convergence de $u_i^{[0,n]}(t,x)$ vers la solution $u_i^{[0]}(t,x)$ de l'équation de transport se démontre sans difficulté.

Méthode [suite-8]

Propriétés de la fonction $\Theta^{[\kappa]}(t,x) = \frac{1}{(4\pi t\kappa)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t\kappa}\Big)$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Theta^{[\kappa]}(t,x-y)\Theta^{[\kappa]}(s,y)dy = \Theta^{[\kappa]}(t+s,x) \qquad \forall s,t>0,$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Theta^{[\kappa]}(t,x)dx = 1,$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Theta^{[\kappa]}(t,x)x_i dx = 0,$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Theta^{[\kappa]}(t,x)|x|dx = C_d\sqrt{t\kappa}, \qquad C_d$: une constante,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Theta^{[\kappa]}(t,x)x_i x_j dx = 2\delta_{ij}t\kappa, \qquad \delta_{ij} = 1$ si $i=j$, $\;=0$ si $i\neq j$.

Résultat I

Soit $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 2$. Si

$$D_x^\alpha v(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad |\alpha| \leq q+1, \tag{24}$$

$$\frac{f(t,x,u)}{1+|u|} \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R})), \tag{25}$$

$$D_{x,u}^\alpha f(t,x,u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})) \qquad 1 \leq |\alpha| \leq q+1, \tag{26}$$

$$D_x^\alpha u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}^d) \qquad |\alpha| \leq q+1, \tag{27}$$

alors pour tout $\tau > 0$, les fonctions $u^{[\kappa,n]}$ définies par (18)–(20) avec leurs dérivées en $x \in \mathbb{R}^d$ d'ordre $\leq q$ et la dérivée première en t convergent uniformément sur $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ vers la solution $u^{[\kappa]}$ du problème de Cauchy

$$\partial_t u^{[\kappa]} + v \cdot \nabla u^{[\kappa]} = \kappa \Delta u^{[\kappa]} + f, \qquad u^{[\kappa]}(0,x) = u_0(x).$$

Résultat I - Convergence de $u^{[\kappa,n]}$ vers $u^{[\kappa]}$ [suite-1]

Le résultat 1 se démontre par

- **Estimation** de

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t,x)|,$$

- **Convergence uniforme de** $D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t,x)$ sur $[0,\tau]\times\mathbb{R}^d$ qui s'obtient par l'estimation de

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t,x) - D_x^\alpha u^{[\kappa,n+1]}(t,x)|,$$

- **Passage à la limite** dans l'approximation de l'équation.

(Le résultat I est essentiellement obtenu dans [Taleb-Selvaduray-Hisao,2020], [Smaali-Hisao,2021].)

Estimation

On obtient l'inégalité

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t,x)| \leq C_\tau, \qquad 0 \leq t \leq \tau, \quad C_\tau \text{ : indépendante de } n,$$

à partir de

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x)| \leq (1+C\delta_n) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)| + C\delta_n.$$

Ici il est essentiel que le premier coefficient soit $(1+C\delta_n)$, car

$$(1+C\delta_n)^{\frac{1}{\delta_n}} \to e^C \qquad \text{pour } n\to\infty.$$

Ni $(1+C\delta_n+\varepsilon)$ ni $(1+C\delta_n^{1-\varepsilon})$ ne donne pas d'estimation souhaitée.

Convergence

Comme

$$t_k^{[n]} = t_{2k}^{[n+1]}, \qquad \Theta_{n+1}^{[\kappa]} * \Theta_{n+1}^{[\kappa]} = \Theta_n^{[\kappa]},$$

en appliquant deux fois la définition (19) à $u^{[\kappa,n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x)$, ceci peut être exprimé en fonction de $u^{[\kappa,n+1]}(t_{2k-2}^{[n+1]}, x)$.

Ainsi la différence $D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) - D_x^\alpha u^{[\kappa,n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x)$ peut être estimée par l'estimation en fonction de la différence $D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - D_x^\alpha u^{[\kappa,n+1]}(t_{2k-2}^{[n+1]}, x)$ et on peut obtenir une inégalité de type

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) - D_x^\alpha u^{[\kappa,n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x)| \leq$$

$$\leq (1+C\delta_n) \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - D_x^\alpha u^{[\kappa,n+1]}(t_{2k-2}^{[n+1]}, x)| + \delta_n^{1/2} C\delta_n,$$

d'où, compte tenu de $\sum_{n=1}^\infty \delta_n^{1/2} < \infty$, on obtiendra la convergence de $D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}$.

Passage à la limite

Le point crucial du “passage à la limite” est le lemma suivant.

Lemme

On a

$$\frac{u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\delta_n} = -v(t_k^{[n]},x)\cdot\nabla u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x) +$$

$$+\kappa\Delta u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + f(t_{k-1}^{[n]},x,u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)) + R \tag{28}$$

avec

$$|R| \leq (\delta_n^2 + \delta_n^{1/2})C_0, \tag{29}$$

où C_0 est une constante indépendante de n.

Ce lemme s'obtient par l'application de la formule de Taylor.

Résultat II - Convergence de $u^{[\kappa]}$ vers $u^{[0]}$

Résultat II

On suppose que v et f vérifient les mêmes conditions que celles du résultat I. Alors, quel que soit $\tau > 0$, on a

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d} \left|u^{[\kappa]}(t,x) - u^{[0]}(t,x)\right| \leq K_{0,\tau}\kappa, \tag{30}$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d,\, 1\leq|\alpha|\leq q-1\}} \left|D_x^\alpha u^{[\kappa]}(t,x) - D_x^\alpha u^{[0]}(t,x)\right| \leq K_{1,\tau}\kappa, \tag{31}$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial}{\partial t}u^{[\kappa]}(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}u^{[0]}(t,x)\right| \leq K_{2,\tau}\kappa, \tag{32}$$

où $K_{0,\tau}$, $K_{1,\tau}$, $K_{2,\tau}$ sont des constantes qui ne dépendent pas de κ.

(Le résultat II est essentiellement obtenu dans [Ait Mahiout-Hisao,2023], [Hisao-Ait Mahiout,2023.)

Le point crucial de la démonstration du résultat II est l'estimation de la différence entre $u^{[\kappa,n]}$ et $u^{[0,n]}$.

Considérons d'abord la différence $u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - u^{[0,n]}(t_k^{[n]},x)$.

On pose

$$u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - u^{[0,n]}(t_k^{[n]},x) = D_1 + D_2 + D_3,$$

où

$$D_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[\kappa]}(y)\big[u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},\gamma_{k,-}^{[n]}(x)-y)-u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},\gamma_{k,-}^{[n]}(x))\big]\,dy,$$

$$D_2 = u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},\gamma_{k,-}^{[n]}(x))-u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},\gamma_{k,-}^{[n]}(x)),$$

$$D_3 = \delta_n\big[f(t_{k-1}^{[n]},x,u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x))-f(t_{k-1}^{[n]},x,u^{[0,n]}(t_{k-1}^{[n]},x))\big].$$

Pour estimer $|D_1|$, on va utiliser les relations

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[\kappa]}(y) y_j dy = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[\kappa]}(y) y_j^2 dy = 2\kappa\delta_n,$$

$$\text{pour} \quad j = 1, \cdots, d.$$

[Ici intervient le facteur κ.]

D'après la formule de Taylor on a

$$u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - y) - u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x)) =$$

$$= -y \cdot \nabla_\xi u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)\Big|_{\xi=\gamma_{k,-}^{[n]}(x)} +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\Big|_{\xi=\gamma_{k,-}^{[n]}(x)-sy} (1-s) ds.$$

Compte tenu aussi de la relation $|y_i y_j| \leq \frac{1}{2}(y_i^2 + y_j^2)$, on en déduit que

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[\kappa]}(y) y \cdot \nabla_\xi u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)\Big|_{\xi=\gamma_{k,-}^{[n]}(x)} dy = 0,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[\kappa]}(y) \int_0^1 \sum_{i,j=1}^d y_i y_j \frac{\partial^2 u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\Big|_{\xi=\gamma_{k,-}^{[n]}(x)-sy} (1-s) ds dy \right| \leq$$

$$\leq \delta_n \kappa \sum_{i,j=1}^d \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^2 u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|.$$

Par conséquent, compte tenu de l'estimation de $u^{[\kappa,n]}$ (comme dans le résultat I), on obtient

$$|D_1| \leq \delta_n \kappa C_\tau. \tag{33}$$

[Notons que $|D_1|$ est majoré par un nombre proportionnel à κ.]

Résultat II - Convergence de $u^{[\kappa]}$ vers $u^{[0]}$ [suite-4]

D'autre part, si on pose

$$A_k = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - u^{[0,n]}(t_k^{[n]},x)|,$$

on obtient (avec une constante C)

$$|D_2| \leq A_{k-1}, \qquad |D_3| \leq \delta_n C\, A_{k-1}.$$

On a donc

$$A_k \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (|D_1| + |D_2| + |D_3|) \leq (1+\delta_n C)A_{k-1} + \delta_n \kappa \Lambda_2(\tau_+).$$

Comme $u^{[\kappa,n]}(t_0^{[n]},x) = u_0(x) = u^{[0,n]}(t_0^{[n]},x)$ et donc $A_0 = 0$, on en déduit que

$$A_k \leq \delta_n \kappa \Lambda_2(\tau_+) \textstyle\sum_{j=1}^k (1+\delta_n C)^{k-j},$$

d'où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u^{[\kappa,n]}(t,x) - u^{[0,n]}(t,x)| \leq \kappa\Lambda_2(\tau_+)\frac{1}{C}e^{C\,\tau} \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq \tau.$$

Résultat II - Convergence de $u^{[\kappa]}$ vers $u^{[0]}$ [suite-5]

Comme $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ et $u^{[0,n]}(t,x)$ convergent uniformément vers $u^{[\kappa]}(t,x)$ et vers $u^{[0]}(t,x)$, on en déduit l'inégalite (30).

Pour la **différence**

$$D_x^{\alpha} u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - D_x^{\alpha} u^{[0,n]}(t_k^{[n]},x),$$

même si les formules sont beaucoup plus longues, on peut procéder avec la même idée et parvenir à l'inégalité (31).

Enfin l'inégalité (32) résulte de l'équation de transport-diffusion que $u^{[\kappa,n]}$ vérifie et de l'inégalité (31).

Résultat III - cas du demi-espace

i) Cas de la condition de Dirichlet homogène :

Résultat III-i

Pour v, f et u_0 on suppose les conditions (24)–(27) (sur $\mathbb{R}^d_+$) avec $q = 2$. On suppose en outre

$$f(t, x', 0, 0) = 0, \quad v_d(t, x', 0) = 0, \quad u_0(x', 0) = 0 \quad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Définissons les fonctions $\widetilde{u}^{[\kappa,n]}(t, x)$

$$\widetilde{u}^{[\kappa,n]}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \Lambda(u^{[\kappa,n]}(t, x' - y', \cdot))(x_d - y_d) dy, \tag{34}$$

où $\Lambda(\cdot)$ est l'opérateur de prolongement impair de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$. Alors les fonctions $\widetilde{u}^{[\kappa,n]}(t, x)$ et leurs dérivées premières en x convergent uniformément sur $[0, \tau] \times \{x_d > 0\}$ pour tout $\tau > 0$, et leurs dérivées secondes en x convergent ponctuellement sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d_+$. La fonction limite vérifie l'équation (ponctuellement en x et au sens généralisé en t) sur $\mathbb{R}^d_+$ avec la condition de Dirichlet homogène.

Résultat III - cas du demi-espace [suite-1]

Le résultat III-i est obtenu essentiellement dans [Aouaouda-Ayadi-Hisao,2022], [Gherdaoui-Taleb-Selvaduray,2023].

Le résultat III-i s'obtient par un raisonnement analogue au résultat I, mais on a besoin aussi de

- Utilisation du prolongement impair,
- Estimation de l'effet de la condition aux limites.

L'opérateur de prolongement impair $\Lambda(\cdot)$ de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$ est défini pour les fonctions $w(\cdot)$ définies sur $r > 0$ comme suit :

$$\Lambda(w(\cdot))(r) = \begin{cases} w(r), & \text{si} \quad r > 0 \\ 0, & \text{si} \quad r = 0 \\ -w(-r), & \text{si} \quad r < 0 \end{cases} .$$

On procède, en prolongeant les données sur $\mathbb{R}^d$ par

$$U_0(x) = \Lambda(u_0(x', \cdot))(x_d), \qquad x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d, \tag{35}$$

$$V'(t, x', x_d) = V'(t, x', -x_d) = v'(t, x', x_d), \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \;\; x_d \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{36}$$

$$V_d(t, x', x_d) = -V_d(t, x', -x_d) = v_d(t, x', x_d), \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \;\; x_d \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{37}$$

$$F(t, x', x_d, U) = \begin{cases} f(t, x', x_d, U), & \text{si} \;\; x_d > 0 \\ 0, & \text{si} \;\; x_d = 0 \\ -f(t, x', -x_d, -U), & \text{si} \;\; x_d < 0 \end{cases}, \quad t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^d, \; U \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

On pose aussi

$$V(t, x) = (V'(t, x), V_d(t, x)) \in \mathbb{R}^d.$$

Résultat III - cas du demi-espace [suite-3]

Alors on peut considérer le problème dans l'espace entier $\mathbb{R}^d$

$$\partial_t U(t,x)+V(t,x)\cdot\nabla U(t,x) = \kappa\Delta U(t,x)+F(t,x,U(t,x))$$

$$\text{dans } \ ]0,\infty[\times\mathbb{R}^d, \qquad (39)$$

avec la condition initiale

$$U(0,x) = U_0(x) \qquad \text{dans } \ \mathbb{R}^d. \qquad (40)$$

Donc on peut construire les solutions approchées $U^{[n]}(t,x)$ d'une manière analogue au résultat I et procéder de manière analogue.

La restriction à $\{x_d > 0\}$ de la solution $U(t,x)$ du problème (39)–(40) sera la solution du problème original. La condition aux limites "$u^{[\kappa]}(t,x',0) = 0$ sur $\{x_d = 0\}$" sera vérifiée par le fait que $U(t,x)$ est impair par rapport à x_d.

Résultat III - cas du demi-espace [suite-4]

Deuxièmement on a besoin de l'**estimation particulière de l'effet de la condition aux limites**.

En effet, même si aux solutions approchées $U^{[n]}(t,x)$ on peut appliquer, en principe, la méthode utilisée pour le théorème I, $\partial_{x_d}^2 F(t,x,U^{[n]}(t,x))$ et $\partial_{x_d}^2 U_0(x)$ ne sont pas continues sur $\{x_d = 0\}$, ce qui exige des estimations particulières des solutions approchées $U^{[n]}(t,x)$.

Comme la dérivée de la discontinuité d'une fonction est la δ de Dirac multipliée par l'amplitude du saut, pour estimer la dérivée troisième de $U^{[n]}(t,x)$ il faut estimer la propagation des valeurs données sur l'hyperplan $\{x_d = 0\}$ dans l'espace $\mathbb{R}^d$.

Résultat III - cas du demi-espace [suite-5]

ii) Cas de la condition de Neumann homogène :

Résultat III-*ii*

Pour v, f et u_0 on suppose les conditions (24)–(27) (sur $\mathbb{R}^d_+$) avec $q = 2$. On suppose en outre

$$v_d(t, x', 0) = 0, \quad \partial_{x_d} v_j(t, x', x_d)\big|_{x_d=0} = 0, \quad j = 1, \cdots, d-1,$$

$$\partial_{x_d} f(t, x', x_d, u)\big|_{x_d=0} = 0, \quad \partial_{x_d} u_0(x', x_d)\big|_{x_d=0} = 0 \qquad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Alors les solutions approchées $u^{[\kappa,n]}(t, x)$ définies d'une manière analogue aux cas précédents et leurs dérivées premières et secondes en x convergent uniformément sur $[0, \tau] \times \{x_d > 0\}$ pour tout $\tau > 0$. La fonction limite vérifie l'équation (ponctuellement en x et au sens généralisé en t) sur $\mathbb{R}^d_+$ avec la condition de Neumann homogène.

Le résultat III-*ii* est essentiellement obtenu dans [Gherdaoui-Selvaduray-Hisao,2024].

Résultat III - cas du demi-espace [suite-6]

Pour le résultat III-*ii* on utilise le **prolongement pair** de $\mathbb{R}^d_+$ sur l'espace entier $\mathbb{R}^d$.

Plus précisément, on pose

$$U_0(x) = \Lambda_0(u_0(x', \cdot))(x_d), \qquad x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

$$V_j(t,x) = \Lambda_0(v_j(t,x',\cdot))(x_d), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \ j = 1, \cdots, d-1,$$

$$V_d(t,x) = \Lambda_1(v_d(t,x',\cdot))(x_d), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

$$V(t,x) = (V'(t,x), V_d(t,x)), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

$$F(t,x,U) = \Lambda_0(f(t,x',\cdot,U))(x_d), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ U \in \mathbb{R},$$

où Λ_0 est l'opérateur de prolongement pair et Λ_1 est l'opérateur de prolongement impair.

Résultat III - cas du demi-espace [suite-7]

Et on définit les solutions approchées $U^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \cdots$, par

$$U^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = U_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y) dy +$$

$$+ \delta_n F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \quad k = 1, 2, \cdots ,$$

$$U^{[n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$$

$$\text{pour} \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Pour ces solutions approchées $U^{[n]}(t,x)$ on peut utiliser le raisonnement de la démonstration du théorème I.
Il n'est pas nécessaire de faire d'estimation particulière de l'effet de la condition aux limites.

Résultat III - cas du demi-espace [suite-8]

iii) Convergence pour $\kappa \to 0$ avec la condition de Neumann homogène :

Résultat III-*iii*

Pour v, f et u_0 on suppose les conditions (24)–(27) (sur $\mathbb{R}^d_+$) avec $q = 2$. On suppose en outre

$$v_d(t, x', 0) = 0, \quad \partial_{x_d} v_j(t, x', x_d)\big|_{x_d=0} = 0, \quad j = 1, \cdots, d-1,$$

$$\partial_{x_d} f(t, x', x_d, u)\big|_{x_d=0} = 0, \quad \partial_{x_d} u_0(x', x_d)\big|_{x_d=0} = 0 \qquad \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Alors pour la solution $u^{[\kappa]}(t, x)$ de l'équation avec diffusion et avec la condition de Neumann homogène et la solution $u^{[0]}(t, x)$ de l'équation sans diffusion et avec la condition de Neumann homogène quel que soit $\tau > 0$, il existe une constante $\overline{C}_0 = \overline{C}_0(\tau)$, indépendantes de κ et telle que

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+} |u^{[0]}(t, x) - u^{[\kappa]}(t, x)| \leq \overline{C}_0 \kappa,$$

Résultat III - cas du demi-espace [suite-9]

Résultat III-*iii* [suite]

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+} |\partial_{x_i} u^{[0]}(t,x) - \partial_{x_i} u^{[\kappa]}(t,x)| \leq \overline{C}_0 \kappa, \qquad i = 1, \cdots, d,$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+} |\Delta u^{[\kappa]}(t,x)| \leq \overline{C}_0.$$

Le résultat III-*iii* est essentiellement obtenu dans [Gherdaoui,à-paraître].

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION

De manière analogue à la démonstration du résultat III-*ii*, on définit le **prolongement pair** des fonctions données.

Résultat III - cas du demi-espace [suite-10]

Avec les données prolongées sur $\mathbb{R}^d$ on définit

les **solutions approchées** $U^{[\kappa,n]}(t,x)$ pour l'équation avec diffusion,

et les **solutions approchées** $U^{[0,n]}(t,x)$ pour pour l'équation sans diffusion.

Cela étant, en utilisant la technique de [Ait Mahiout-Hisao,2023] on peut obtenir

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+} |U^{[0]}(t,x) - U^{[\kappa]}(t,x)| \leq \overline{C}_0\kappa,$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+} |\partial_{x_i}U^{[0]}(t,x) - \partial_{x_i}U^{[\kappa]}(t,x)| \leq \overline{C}_0\kappa, \qquad i = 1,\cdots,d,$$

$$\sup_{(t,x)\in[0,\tau]\times\mathbb{R}^d_+} |\Delta U^{[\kappa]}(t,x)| \leq \overline{C}_0.$$

On en déduira les inégalités analogues pour $u^{[0]}(t,x)$ et $u^{[\kappa]}(t,x)$.

iv) Convergence pour $\kappa \to 0$ avec la condition de Dirichlet homogène :

Le travail est en cours.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant

Dans le **cas où le coefficient de diffusion κ dépend de $x \in \mathbb{R}^d$**, on a besoin de nouvelles techniques :

- introduction de "**fonctions de position $X_{k,y}^{n,h}(x)$**",
- définition des solutions approchées à $t_k^{[n]}$ par

$$u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[1]}(y) u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - a(x)y)dy + \delta_n f(t_{k-1}^{[n]}, x), \quad (41)$$

où $\quad a(x) = \sqrt{\kappa(x)}\,, \quad \Theta_n^{[1]}(x) = \dfrac{1}{(4\pi\delta_n)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4\delta_n}}\,,$

au lieu de (19).

Les définitions (18) et (20) formellement restent identiques.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-1]

Pour le moment nous nous limitons au cas où f ne dépend pas de u. On a le

Résultat IV-i

Pour v et u_0 on suppose les conditions (24) et (27). On suppose en outre que

$$D_x^\alpha \kappa(x) \in C_b(\mathbb{R}^d) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq q+1,$$

$$D_x^\alpha f(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^d)) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq q+1.$$

Alors, quel que soit $\tau > 0$, les fonctions $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ définies par (18), (41) et (20) et leurs dérivées $D_x^\alpha u^{[\kappa,n]}(t,x)$, $|\alpha| \leq q$, convergent pour $n \to \infty$ uniformément sur $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ respectivement vers une fonction $u^{[\kappa]}(t,x)$ et vers ses dérivées $D_x^\alpha u^{[\kappa]}(t,x)$.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-2]

Résultat IV-*i* [suite]

En outre la dérivée droite par rapport à t de $u^{[\kappa,n]}(t,x)$

$$(\partial_t u^{[\kappa,n]})_+(t,x) = \frac{u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]},x) - u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\delta_n}$$

$$\text{pour} \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t < t_k^{[n]}, \quad k = 1, 2, \cdots ,$$

convergent pour $n \to \infty$ uniformément dans $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ vers $\partial_t u^{[\kappa]}(t,x)$ et la fonction limite $u^{[\kappa]}(t,x)$ satisfait ponctuellement à l'équation

$$\partial_t u^{[\kappa]}(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla u^{[\kappa]}(t,x) = \kappa(x) \Delta u^{[\kappa]}(t,x) + f(t,x)$$

dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et à la condition initiale $u^{[\kappa]}(0,x) = u_0(x)$ dans $\mathbb{R}^d$.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-3]

Le résultat IV-*i* est essentiellement obtenu dans [Nemdili-Hisao,2024].

Rappelons que l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[1]}(y) u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - a(x)y)dy$$

utilisée dans la définition de $u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x)$ est équivalente à

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi\delta_n\kappa(x))^{d/2}} \exp(-\frac{|y|^2}{4\delta_n\kappa(x)}) u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - y)dy,$$

ce qui résulte immédiatement du changement de variables $y' = a(x)y = \sqrt{\kappa(x)}y$.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-4]

Fonctions de position $X_{k,y}^{n,h}(x)$

On la définit par

$$X_{k,y}^{n,0}(x) = x, \tag{42}$$

$$X_{k,y}^{n,h}(x) = \gamma_{k-h+1,-}^{[n]}(X_{k,y}^{n,h-1}(x)) - a(X_{k,y}^{n,h-1}(x))y^h, \quad h = 1, \cdots, k \tag{43}$$

(ici h dans la notation y^h est un simple indice et ne désigne pas la puissance).

Pourquoi il nous faut utiliser la fonctions de position $X_{k,y}^{n,h}(x)$?

Si on faisait l'estimation de $\partial_{x_i} u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x)$ sur l'expression de $u^{[\kappa,n]}(t_k^{[n]}, x)$ donnée sur chaque pas "de $t_{k-1}^{[n]}$ à $t_k^{[n]}$", alors on devrait estimer

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[1]}(y) u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - a(x)y) dy =$$

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-5]

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[1]}(y) \frac{\partial}{\partial x_i} u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - a(x)y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[1]}(y) \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \xi_j} u^{[\kappa,n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi) \Big|_{\xi=\gamma_{k,-}^{[n]}(x)-a(x)y} \times$$

$$\times (\partial_{x_i} \gamma_{k,-}^{[n]}(x) - \partial_{x_i} a(x) y_j) dy.$$

Pour estimer le terme $\Theta_n^{[1]}(y)\partial_{\xi_j} u^{[\kappa,n]} \partial_{x_i} a(x) y_j$ nous serions contraints à utiliser

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n^{[1]}(y) |y_j| dy = C\sqrt{\delta_n},$$

mais $2^n \sqrt{\delta_n} = 2^n \sqrt{2^{-n}} = \sqrt{2^n} \to \infty$ pour $n \to \infty$. Donc l'estimation de $\partial_{x_i} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ sur chaque pas "de $t_{k-1}^{[n]}$ à $t_k^{[n]}$" ne nous donne pas d'estimation utile.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-6]

Par contre, si nous utilisons la fonctions de position $X^{n,h}_{k,y}(x)$, alors $u^{[\kappa,n]}(t^{[n]}_k, x)$ peut être écrite sous la forme

$$u^{[\kappa,n]}(t^{[n]}_k, x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^k} (\prod_{h=1}^{k} \Theta_n(y^h)) u_0(X^{n,k}_{k,y}(x)) dy^1 \cdots dy^k +$$

$$+\delta_n \sum_{h=1}^{k-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} (\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'})) f(t^{[n]}_{k-h-1}, X^{n,h}_{k,y}(x)) dy^1 \cdots dy^h +$$

$$+\delta_n f(t^{[n]}_{k-1}, x).$$

Donc l'estimation de sa dérivée se réduit à l'estimation de $u_0(X^{n,k}_{k,y}(x))$ et de $f(t^{[n]}_{k-h-1}, X^{n,h}_{k,y}(x))$, qui peuvent être estimés sur la base de l'estimation de $X^{n,h}_{k,y}(x)$.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-7]

Nous avons besoin de l'estimation des “fonctions de positions” $X^{n,h}_{k,y}(x)$. On a le lemme suivant.

Lemme 1

Soit $X^{n,h}_{k,y}(x)$ la fonction définie par (42)–(43). Alors sous les conditions du résultat IV-*i* il existe une fonction continue et croissante $\Phi^{(q,m)}(s) = \Phi^{(\overline{\tau};q,m)}(s)$ indépendante de n, k et h et telle que, si $t^{[n]}_k \leq \overline{\tau}$, on ait

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^h} \Big(\prod_{h'=1}^{h} \Theta_n(y^{h'})\Big)\Big(\sum_{j=1}^{d}(D^\alpha_x(X^{n,h}_{k,y}(x))_j)^2\Big)^m dy^1 \cdots dy^h \leq$$

$$\leq \Phi^{(q,m)}(h\delta_n)$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = q+1$.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-8]

Nous avons besoin aussi la convergence des "fonctions de positions" $X^{n,h}_{k,y}(x)$. On a le lemme suivant.

Lemme 2

Supposons que l'hypothèse du résultat IV-*i* est vérifiée. Soit $X^{n,h}_{k,y}(x)$ la fonction définie par (42)–(43). Soit $\tilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x)$ la fonction définie par les relations

$$\tilde{X}^{n,0}_{k+1,y}(x) = x,$$

$$\tilde{X}^{n,h}_{k+1,y}(x) =$$

$$= \gamma^{[n]}_{k-h+2,-}(\tilde{X}^{n,h-1}_{k+1,y}(x)) - a(\tilde{X}^{n,h-1}_{k+1,y}(x))(y^{2h-1} + y^{2h}).$$

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-9]

suite de l'énoncé du lemme 2

Alors

1) pour chaque $(\overline{\tau}, m) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{N}\backslash\{0\})$ il existe une constante $K_2 = K_2(\overline{\tau}, m)$ indépendante de n, k et h et telle que, si $t_{k+1}^{[n]} \leq \overline{\tau}$, alors on ait

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}} \Big(\prod_{h'=1}^{2h} \Theta_{n+1}(y^{h'})\Big) \Big| X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x) - \widetilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x) \Big|^{2m} dy^1 \cdots dy^{2h} \leq$$

$$\leq \delta_{n+1} e^{K_2 h \delta_{n+1}}.$$

2) pour chaque $(\overline{\tau}, m, q) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{N}\backslash\{0\}) \times (\mathbb{N}\backslash\{0\})$ il existe une fonction continue et croissante $\Psi^{(q,m)}(s) = \Psi^{(\overline{\tau},q,m)}(s)$ indépendante de n, k et h et telle que, si $t_{k+1}^{[n]} \leq \overline{\tau}$, on ait

suite de l'énoncé du lemme 2

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{(\mathbb{R}^d)^{2h}}\Big(\prod_{h'=1}^{2h}\Theta_n(y^{h'})\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{j=1}^{d}\big(D_x^\alpha(X_{2k+2,y}^{n+1,2h}(x))_j - D_x^\alpha(\tilde{X}_{k+1,y}^{n,h}(x))_j\big)^2\Big)^m dy^1\cdots dy^{2h}\leq$$

$$\leq(\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}}\Psi^{(q,m)}(h\delta_{n+1})$$

pour tout $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$, $|\alpha|=q$.

NOTE La dernière inégalité peut être améliorée dans le sens que le second membre peut avoir un facteur $\delta_{n+1}^{1/2}$ au lieu de $(\delta_{n+1})^{\frac{1}{2q}}$.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-11]

L'estimation de $u^{[\kappa,n]}$ se fait avec l'estimation de $X^{n,h}_{k,y}(x)$, et la convergence de $u^{[\kappa,n]}$ se démontre à l'aide de la convergence de $X^{n,h}_{k,y}(x)$.

Pour la démonstration de la convergence uniforme de la dérivée droite (ou bien dérivée gauche) par rapport à t de $u^{[\kappa,n]}(t,x)$, on a utilisé la continuité uniforme sur $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ des fonctions $u^{[\kappa,n]}(t,x)$, $\partial_{x_i} u^{[\kappa,n]}(t,x)$ et $\partial_{x_j}\partial_{x_i} u^{[\kappa,n]}(t,x)$.

Pour démontrer cette continuité uniforme, on a utilisé des estimations des "fonctions de position $X^{n,h}_{k,y}(x)$".

Commentaire

Pour le cas où f dépend de u, le travail est en cours.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-12]

Cas où $\kappa = \kappa(t)$ dépend de t

Si $\kappa(t)$ dépend seulement de t, alors on peut introduire le changement de variables $t \to s$ par

$$s = s(t) = \int_0^t \kappa(t')dt',$$

de sorte que

$$\partial_s u(t(s), x) = \partial_t u(t, x)\frac{dt(s)}{ds} = \frac{1}{\kappa(t)}\partial_t u(t, x)$$

et donc, en divisant l'équation par $\kappa(t)$, on a l'équation

$$\partial_s u(t(s), x) + \frac{1}{\kappa(t)} v(t(s), x) \cdot \nabla u(t(s), x) =$$

$$= \Delta u(t(s), x) + \frac{1}{\kappa(t)} f(t(s), x, u(t(s), x)).$$

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-13]

De cette manière on a le résultat [Taleb-Gherdaoui,2025]

Résultat IV-*ii*

On suppose que $\kappa(t) > 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.q. si } \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \kappa(t) dt \leq \delta, \text{ alors } \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\kappa(t)} D_x^\alpha v(t,x), \ \frac{1}{\kappa(t)} \frac{D_{x,u}^\alpha f(t,x,u)}{1+|u|}, \ D_x^\alpha u_0(x), \quad \text{bornée}, \quad |\alpha| \leq 3,$$

$$\frac{1}{\kappa(t(s))} D_x^\alpha v(t(s),x), \ \frac{1}{\kappa(t(s))} D_{x,u}^\alpha f(t(s),x,u) \in \Lambda, \quad |\alpha| \leq 2,$$

$$\Lambda = \{\varphi : \text{continue}, \forall \tau > 0 \ \textstyle\sum_{n=1}^\infty \lambda_{\tau,n}(\varphi) < \infty\},$$

$$\lambda_{\tau,n}(\varphi) = \sup\{ |\varphi(r_1,x) - \varphi(r_2,x)|, \ r_1, r_2 \in [0,\tau], x \in \mathbb{R}^d, |r_1 - r_2| \leq \delta_n\}.$$

Alors les solutions approcées $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ convergent pour $n \to \infty$.

Résultat IV - cas d'un coefficient de diffusion non-constant [suite-14]

Cas où $\kappa = \kappa(t,x)$ dépend de t et de x

Dans ce cas, en utilisant les techniques soit du résultat IV-*i* soit du résultat IV-*ii*, on peut obtenir le résultat suivant ([Bezia-Gherdaoui,soumis])

Résultat IV-*iii*

On suppose que $\kappa(t,x)$, $v(t,x)$, $f(t,x)$ et $u_0(x)$ vérifient les conditions du résultat IV-*i* et celles du résultat IV-*ii*, en particulier

$$\frac{2\kappa(t,x)}{\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\kappa(t,y)+\inf_{y\in\mathbb{R}^d}\kappa(t,y)} \in \Lambda.$$

Alors les solutions approchées $u^{[\kappa,n]}(t,x)$ convergent pour $n\to\infty$ de manière aux cas précédents.

Perspective I - dans un domaine plus générale

Il est naturel de poser la question :

Est-ce qu'il est possible de généraliser ce qu'on a fait au cas où le domaine est différent de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^d_+$?

Supposons que la frontière de ce domaine est suffisamment régulière. Alors on peut envisager de transformer un sous-domaine touchant la frontière en le demi-espace. Alors il faut introduire le changement de variables, qui transforme aussi le laplacien en un opérateur différentiel.

Donc on a besoin de la possibilité de **traiter l'équation de transpor-diffusion avec un opérateur elliptique qui dépend de** x. Nous pensons que c'est possible en généralisant la technique de [Nemdili-Hisao,2024].

Puis, naturellement il faut utiliser le raisonnement de nos travaux dans $\mathbb{R}^d_+$.

Perspective II - avec des conditions aux limites plus générales

Jusqu'à maintenant nous nous sommes limités aux cas de condition de Dirichlet homogène ou condition de Neumann homogène sur la frontière du demi-espace.

Si on considère par exemple la condition de Dirichlet non-homogène sur la frontière du demi-espace et si on construit une fonction $\overline{u}_1(t,x)$ telle que la fonction $\widetilde{u}(t,x) = u(t,x) - \overline{u}_1(t,x)$ vérifie la condition de Dirichlet homogène, alors on peut obtenir un résultat analogue. Mais si on le fait d'une manière élémentaire, il faut supposer beaucoup de régularité des données, ce qui nous semble peu naturel. Donc nous devons chercher une généralisation avec des conditions de régularités raisonnables.

De plus, lorsque la fonction de transport v est entrante ($v \cdot n < 0$ avec la normale extérieure n), le problème n'est pas facile. Nous avons déjà tenté ([Selvaduray-Hisao,soumis]), mais le résultat est faible. Il nous faut éclaircir la situation.

Perspective III - dans l'espace de Hölder

L'**espace de Hölder** peut être un outil adapté à notre méthode, car il n'exige pas l'intégrabilité de la fonction considérée, en particulier dans un domaine non borné.

Dans [Nemdili-Korichi-Hisao,2024] nous avons montré que les solutions approchées jouissent de la régularité höldérienne $C^{k+\sigma}$ si les données possèdent la même régularité höldérienne et elles convergent vers la solution de l'équation dans l'espace $C^{k+\sigma'}$, $\sigma' < \sigma$, et la fonction limite jouisse de la régularité $C^{k+\sigma}$.

Mais nous voulons aller plus loin : montrer que la solution jouisse de la régularité höldérienne $C^{k+2+\sigma}$, ce qui est le cas de la solution de l'équation de la chaleur, comme nous l'avons évoqué dans la première partie de ce séminaire.

Mais il nous semble que c'est assez difficile. Mais il vaut la peine de tenter.

Perspective IV - calcul numérique

Comme nous construisons les solutions approchées selon le principe du schéma explicite de la méthode de différences finies, on pourrait penser qu'il est possible de construire un schéma numérique basé sur notre solution approchée. Nous avons déjà obtenu un "bon" résultat numérique dans [Aouaouda-Ayadi-Hisao,2022]. Mais ce "succès" est dû aux circonstances particulières du problème : il s'agissait d'une modélisation de la diffusion de la vapeur qui sort de la surface de la mer ; dans ce modèle on s'intéressait à la diffusion de la vapeur dans la direction verticale (presque indépendamment de la position horizontale), tandis que le transport (vent) est supposé horizontal.

Pour avoir un schéma numérique plus général et acceptable, il faut métriser la diffusion due au calcul numérique de telle sorte que l'on puisse apprécier la diffusion due au problème même, en évitant que la diffusion due au calcul numérique envahisse le résultat.

Perspective V - système d'équations semi-linéaires

Dans [Hisao-Ait Mahiout,2023] nous avons déjà traité le cas le plus simple de système d'équations semi-mlinéaires, ce qui toutefois ne diffère pas beaucoup du cas d'une équation.

Maintenant nous sommes en train d'étudier le système d'équations du modèle de compétion de m espèces avec transport et diffusion. Le transport est du type conservation de la masse comme l'équation de continuité. Il faut établir une bonne estimation pour le terme non-linéaire, mais ce n'est pas difficile.

Une question plus intéressante sera par exemple l'équation de Lotka-Volterra du modèle de proie-prédateur avec transport et diffusion.

Une question encore plus intéressante serait un système où les termes de diffusion sont inter-connectés, c'est-à-dire à l'équation de la i-ème composante intervient la diffusion d'autres composantes du système.

Perspective IV - équations de la mécanique des fluides

Les équations de la **mécanique des fluides** sont les objets que nous voulons le plus atteindre. En effet, dans la mécanique des fluides le transport et la diffusion ont leur propre sens.

Toutefois les équations de la mécanique des fluides ne sont pas faciles à traiter, car essentiellement **le transport est un connu**. Donc les outils que nous avons construits ne seront pas suffisants pour traiter ces équations.

Peut-être on peut commencer avec les équations linéarisées ou semi-linéariser.

Peut-être il sera utile d'étudier l'équation de Burgers comme le cas le plus simple des équations quasi-linéaires. La comparaison avec des propriétés connues sur l'équation de Burgers pourra nous donner de nouvelles intuitions.

On va voir.

Références de la Deuxième Partie

- [Taleb-Selvaduray-Hisao,2020] Taleb, L., Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, vol. **8** (2020), pp. 53–73.

- [Smaali-Hisao,2021] Smaali, H., Fujita Yashima, H. : Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'equation de transport-diffusion. *Ann. Math. Afr.*, vol. **9** (2021), pp. 89–108.

- [Aouaouda-Ayadi-Hisao,2022] Aouaouda, M., Ayadi, A., Fujita Yashima, H. : Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane (en russe). *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, vol. **26** (2022), pp. 222–258.

Références de la Deuxième Partie [suite-1]

- [Ait Mahiout-Hisao,2023] Ait Mahiout, L., Fujita Yashima, H. : Convergence de la solution d'une équation de transport-diffusion vers la solution d'une équation de transport. *Ann. Math. Afr.*, vol. **10** (2023), pp. 105–124.

- [Hisao-Ait Mahiout,2023] Fujita Yashima, H., Ait-Mahiout, L. : Convergence of solution of transport-diffusion system to that of transport system (en russe). *Bull. Buryat St. Univ. Math. Inf.*, vol. **2023**, N. 1 (2023), pp. 22–36.

- [Gherdaoui-Taleb-Selvaduray,2023] Gherdaoui, R., Taleb, L., Selvaduray, S. : Convergence of the heat kernel approximated solutions of the transport-diffusion equation in the half-space. *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **527** (2023), 127507.

Références de la Deuxième Partie [suite-2]

- [Gherdaoui-Selvaduray-Hisao,2024] Gherdaoui, R., Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Convergence of approximate solutions for transport-diffusion equation in the half-space with Neumann condition (en russe). *Izv. Irkutsk gos. univ., Ser. Mat.*, vol. **48** (2024), pp. 64–79.

- [Nemdili-Hisao,2024] Nemdili, A., Fujita Yashima, H. : On the approximation of the solution of transport-diffusion equation with a non-constant coefficient of diffusion. (en russe) *Sibir. Elekt. Mat. Izv.* [*Siberian Elect. Math. Reports*], vol. **21**, N° 2 (2024), pp. 1064–1096.

- [Nemdili-Korichi-Hisao,2024] Nemdili, A., Korichi, F., Fujita Yashima, H. : Approximation of the solution of transport-diffusion equation in Hölder space. (en russe). *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz. Mat. Nauki* [*J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci*], vol. **28** (2024) pp. 426–444.

Références de la Deuxième Partie [suite-3]

- Gherdaoui, R. : Convergence of the solution of transport-diffusion equation to that of transport equation in the half-space with homogeneous Neumann condition. A paraître sur *Bull. Transilvania Univ. Brasov, Ser. III Math. Inf. Phys.*

- [Bezia-Gherdaoui,soumis] Bezia, A., Gherdaoui, R. : Article soumis.

- [Selvaduray-Hisao,soumis] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Article soumis.

☺ MERCI DE VOTRE ATTENTION